

SYLWIA HOŻEJOWSKA
LESZEK HOŻEJOWSKI

Wydział Zarządzania i Modelowania Komputerowego, Politechnika Świętokrzyska, Kielce

Analiza błędów przy wyznaczaniu współczynnika przejmowania ciepła przy przepływie cieczy w minikanale

Wprowadzenie

Badania eksperymentalne wyznaczania współczynnika przejmowania ciepła przy przepływie cieczy w minikanale zostały opisane w pracach [1, 2]. Poniżej przedstawiono je skrótowo. Najważniejszym elementem stanowiska badawczego jest moduł pomiarowy z minikanalem, przez który przepływa płyn chłodniczy (FC-72). Jedną ze ścian kanału stanowi folia grzejna zasilana prądem stałym, na którą natryśnięte są termoczułe ciekłe kryształy. Obserwację zmian barwy powierzchni folii umożliwia przesłonięty szklaną szybą otwór. Tylne ściany minikanalu jest quasiadiabatyczna. Poszukiwane są lokalne współczynniki przejmowania ciepła na powierzchni oddzielającej folię grzejną i płyn chłodniczy. Szukane wielkości wyznaczone są na podstawie pomiaru temperatury w wewnętrznych punktach układu oraz dzięki znajomości mocy elektrycznej dostarczanej do grzejnika.

Model jednowymiarowy zagadnienia

Zakłada się, że w układzie ciecz – przegroda panuje stan ustalony a zmiany temperatury folii i płynu oraz prędkości cieczy wzdłuż szerokości kanału są niewielkie. W zaproponowanym podejściu uwzględniono wymiar x w kierunku przepływu, oraz wymiar y normalny do niego i odniesiony do grubości folii (δ_F) oraz grubości szkła (δ_G). Wielkości odnoszące się do folii oznaczono dolnym indeksem F .

Zmiennność strumienia ciepła wzdłuż współrzędnej x jest znikoma, stąd zaniedbuje się ją, a na styku folia – ciecz zachodzi warunek:

$$-\lambda_F \frac{\partial T_F(x, \delta_G + \delta_F)}{\partial y} = \alpha(x) [T_F(x, \delta_G + \delta_F) - T_l(x)] \quad (1)$$

gdzie α jest poszukiwanym współczynnikiem przejmowania ciepła, zaś $T_l(x)$ temperaturą płynu, przybliżaną liniowo na całej długości minikanalu.

Przyjmując, że całe generowane w folii ciepło jest odbierane przez wrzącą ciecz, możemy napisać:

$$-\lambda_F \frac{\partial T_F(x, \delta_G + \delta_F)}{\partial y} = q_V \delta_F = \frac{U I}{\delta_F W_F L} \delta_F \quad (2)$$

gdzie:

- U – spadek napięcia na folii grzejnej, [V];
- I – prąd dostarczany do folii grzejnej, [A];
- W_F – szerokość folii, [m];
- L – długość folii, [m].

Założenia (1) i (2) oraz zastąpienie pochodnej $\frac{\partial T_F}{\partial y}$ ilorazem

różnicowym prowadzą do wzoru na współczynnik przejmowania ciepła:

$$\alpha(x) = \frac{q_V \lambda_F \delta_F}{\lambda_F [T_F(x, \delta_G) - T_l(x)] - q_V \delta_F^2} \quad (3)$$

We wzorze (3) temperatura folii brana jest w punktach pomiarowych x_k , tzn. $T_F(x_k, \delta_G) = T_k$. Temperaturę $T_F(x_k, \delta_G)$ można też przybliżyć wielomianem aproksymującym pomiary T_k . Inne metody wyznaczania współczynnika α omówiono w pracy [2].

Zastosowanie rachunku wyrównawczego

Pomiary eksperymentalne T_k , które aproksymowane są wielomianem, można skorygować przy użyciu rachunku wyrównawczego [3, 4]. We wzorze (3) pomiary temperatury T_k aproksymuje się wielomianem stopnia n , czyli

$$\alpha_0 + \alpha_1 x_k + \alpha_2 x_k^2 + \dots + \alpha_n x_k^n - T_k = \Delta_k \quad (4)$$

lub w zapisie macierzowym

$$XA - T = \Delta \quad (5)$$

gdzie Δ jest wektorem różnic między temperaturą zmierzoną a jej aproksymatą. Szukamy jak w pracach [3, 4] poprawek ϵ_k dla temperatury T_k oraz poprawek ξ_j dla współczynników α_j tak, aby spełniony był warunek

$$X\tilde{A} - \tilde{T} = 0 \quad (6)$$

gdzie \tilde{A} jest wektorem skorygowanych pomiarów, zaś \tilde{T} jest wektorem skorygowanych współczynników. Warunek (6) jest warunkiem pobocznym przy minimalizowaniu funkcji

$$W = \epsilon^T V \epsilon \rightarrow \min \quad (7)$$

Macierz $V = [1/\sigma_k^2]$ jest macierzą wag, a σ_k oznacza błąd pomiaru temperatury w k -tym punkcie pomiarowym. Błąd σ_k uzyskuje się z krzywej kalibracji, która określa zależność pomiędzy temperaturą folii a barwą ciekłych kryształów. Liczba σ_k wyraża błąd oszacowania wartości temperatury folii grzejnej na podstawie barwy wskazywanej przez ciekłe kryształy [1, 2].

Oznaczając $F = (X^T V X)^{-1}$, otrzymujemy wektor skorygowanych pomiarów

$$\tilde{T} = X F X^T V T + (I - X F X^T V) A X \quad (8)$$

gdzie I jest macierzą jednostkową. Błędy skorygowanych pomiarów \tilde{T} wyznacza się w oparciu o prawo propagacji błędów [3], są one równe pierwiastkom kwadratowym z elementów leżących na diagonalu macierzy C określonej wzorem

$$C = (XFX^T V)^{-1} (XFX^T V)^T = XFX^T \quad (9)$$

Wyglądzone pomiary \tilde{T}_k aproksymujemy nowym wielomianem stopnia n .

Błąd współczynnika przejmowania ciepła

Współczynnik przejmowania ciepła, dany równaniem (3) zależy od parametrów folii: współczynnika przewodzenia ciepła – λ_F , grubości folii – δ_F , temperatury folii $T_F(x, \delta_G)$ i temperatury płynu $T_l(x)$ oraz wewnętrznej wydajności źródła ciepła – q_V . Średni błąd kwadratowy współczynnika przejmowania ciepła w tym przypadku dany jest wzorem:

$$\Delta\alpha = \sqrt{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda_F}\Delta\lambda_F\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial\delta_F}\Delta\delta_F\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial T_F}\Delta T_F\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial T_l}\Delta T_l\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial q_V}\Delta q_V\right)^2} \quad (10)$$

w którym przyjmujemy następujące wartości:

- $\Delta\lambda_F$ – błąd bezwzględny pomiaru współczynnika przewodzenia ciepła przyjęty jako $\Delta\lambda_F = 0,01 \text{ W/(mK)}$;
- $\Delta\delta_F$ – błąd bezwzględny pomiaru grubości folii, $\Delta\delta_F = 5 \cdot 10^{-8} \text{ m}$;
- ΔT_F – błąd bezwzględny pomiaru temperatury, $\Delta T_F(x_k, \delta_G) = \sigma_k$,
- ΔT_l – błąd bezwzględny pomiaru temperatury płynu $\Delta T_l = 0,39 \text{ K}$, [5];
- Δq_V – błąd bezwzględny pomiaru wydajności źródła ciepła, $\Delta q_V = 1,164 \cdot 10^6 \text{ W/m}^3$, [5].

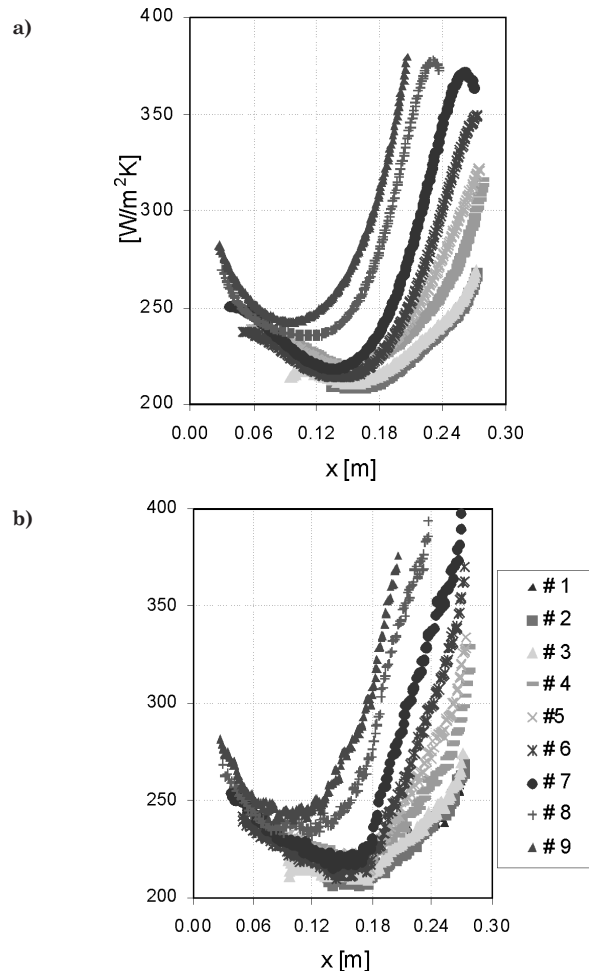
Prezentacja i omówienie wyników

Poniżej przedstawiono wyniki obliczania współczynnika przejmowania ciepła dla warunków eksperymentalnych podanych na rys. 1. Dane pomiarowe T_k aproksymowano wielomianem stopnia $n = 5$.

Nr nastawy								
#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9
$q_V = 7,26 \cdot 10^4 \text{ kW/m}^3$	$q_V = 7,75 \cdot 10^4 \text{ kW/m}^3$	$q_V = 8,55 \cdot 10^4 \text{ kW/m}^3$	$q_V = 8,77 \cdot 10^4 \text{ kW/m}^3$	$q_V = 9,30 \cdot 10^4 \text{ kW/m}^3$	$q_V = 9,85 \cdot 10^4 \text{ kW/m}^3$	$q_V = 1,04 \cdot 10^5 \text{ kW/m}^3$	$q_V = 1,11 \cdot 10^5 \text{ kW/m}^3$	$q_V = 1,16 \cdot 10^5 \text{ kW/m}^3$

Rys. 1. Obrazy rozkładu temperatury folii grzejnej przy danych eksperymentalnych: minikanal 30° odchylony od pionu od góry, głębokość kanału 0,0015 m, $L = 0,36 \text{ m}$; $W_F = 0,04 \text{ m}$; prędkość przepływu cieczy 7 m/s; liczba Reynoldsa $Re = 543$; ciśnienie cieczy na wlocie do kanału 197 kPa, $q_V = 7,26 \cdot 10^4 - 11,6 \cdot 10^5 \text{ kW/m}^3$

Na rys. 2 przedstawiono wykresy lokalnych współczynników przejmowania ciepła dla kolejnych nastaw.



Rys. 2. Lokalne współczynniki przejmowania ciepła liczone w przypadku pomiarów: a) aproksymowanych wielomianem; b) nie aproksymowanych wielomianem

Charakter wykresu współczynnika przejmowania ciepła z rys. 2a, policzony dla nastaw #7 i #8 różni się od charakteru wykresów w pozostałych nastawach. Jest to wynikiem aproksymacji pomiarów temperatury wielomianem stopnia 5, wskutek czego powstaje tzn. efekt nadmiernego dopasowania. Można uniknąć wspomnianego efektu, jeżeli wykorzysta się we wzorze (3) bezpośrednie dane pomiarowe, a nie ich aproksymatę – co widać na rys. 2b). Dla powyższych współczynników policzono także średnie błędy współczynnika przejmowania ciepła i przedstawiono je w tabelicy 1a).

Zastosowanie rachunku wyrównawczego pozwoliło na zmniejszenie średnich błędów współczynników przejmowania ciepła (Tabela 1b). Ponadto, rachunek wyrównawczy pozwala „wygładzić” dane pomiarowe, a dla „wygładzonych” danych pomiarowych wyliczane odchylenia standardowe są znacznie niższe niż otrzymane z eksperymentu, co przedstawiono na rys. 3. Poprawki pomiarów temperatury występujące we wzorze (7) mają rozkład normalny o zerowej wartości średniej i odchyleniu standardowym σ_k , więc powinny spełniać warunek [3, 4]

$$|\epsilon_k| < 3\sigma_k \quad (11)$$

Dla nastaw #6 i #7 warunek (11) spełnia 98% poprawek ϵ_k , dla pozostałych nastaw wszystkie poprawki ϵ_k spełniają warunek (11). Przy przyjętych założeniach odnośnie ϵ_k funkcja W dana wzorem (7) ma rozkład χ^2 z $K - n - 1$ liczbą stopni

Tablica 1

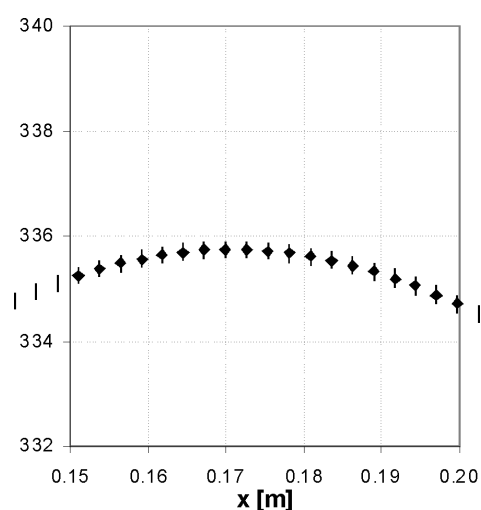
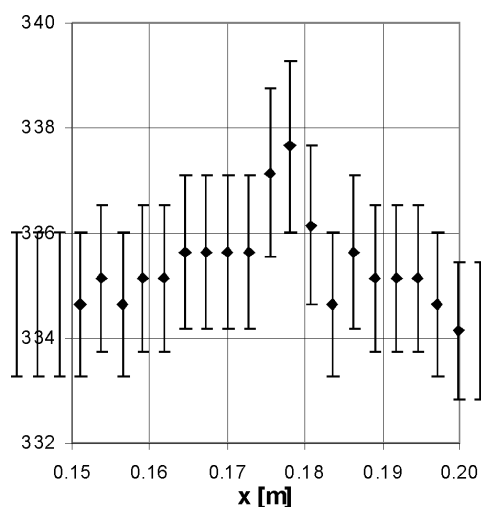
Średnie błędy współczynnika przejmowania ciepła

Błąd $\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$ [%]	Nr nastawy								
	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9
a) przed zastosowaniem rachunku wyrównawczego	2,59	2,61	2,69	3,04	3,18	3,18	3,21	3,14	3,27
b) po zastosowaniu rachunku wyrównawczego	1,89	1,81	1,73	1,71	1,66	1,61	1,58	1,55	1,51

Tablica 2

Wartości $\chi_{0,99}^2$ oraz funkcji W

Wartości	Numer nastawy								
	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9
W	38,82	15,62	30,32	50,72	74,69	131,51	352,89	123,30	26,85
$\chi_{0,99}^2$	182,98	188,67	234,91	260,60	286,14	293,89	304,94	272,89	239,39

Rys. 3a) $T_k \pm \sigma_k$ – temperatura i błąd pomiaru temperatury dla #5, b) $\tilde{T}_k \pm \tilde{\sigma}_k$ – Wygładzone pomiary temperatury i błędy pomiarów wygładzonych dla #5

swobody [3]. Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że wartość funkcji W w żadnym z przypadków nie jest dużo większa od liczby stopni swobody (Tablica 2), co świadczy o wiarygodności przeprowadzonych obliczeń [3]. Dodatkowo można wykorzystać test χ^2 , który pozwala odrzucić wynik dopasowania wielomianu stopnia n -tego do pomiarów, gdy na poziomie istotności β zachodzi

$$W > \chi_{1-\beta}^2(K - n - 1) \quad (12)$$

W prezentowanym modelu jedynie dla nastawy #7 warunek (12) jest spełniony (Tablica 2), więc na poziomie ufności 99% przybliżanie pomiarów temperatury wielomianem stopnia 5 w tym przypadku nie jest odpowiednie.

Podsumowanie

1. W przedstawionym podejściu współczynnik przejmowania ciepła jest funkcją ciągłą odległości punktu x od wlotu kanału.
2. Zaprezentowana metoda wykazuje małą wrażliwość na błędy danych wykorzystanych do obliczeń.

3. Zastosowanie rachunku wyrównawczego spowodowało wygładzenie pomiarów temperatury oraz znaczne zmniejszenie odchyżeń standardowych wygładzonych pomiarów. Ponadto, aplikacja rachunku wyrównawczego spowodowała znaczne, bo prawie dwukrotne, zmniejszenie średniego błędu względnego współczynnika przejmowania ciepła (Tablica 1b).

4. Podane kryterium poprawności dopasowania wielomianu stopnia n -tego do danych pomiarowych spełnione jest dla większości nastaw (Tablica 2).

LITERATURA

1. M. Piasecka: Inż. Ap. Chem., 45, nr 6s, 186 (2006).
2. M. Piasecka, S. Hożejowska, M. E. Poniewski: Int. J. of Heat and Fluid Flow, 25, 159 (2004).
3. S. Brandt: Analiza danych, PWN, Warszawa, (2002).
4. J. Szargut: Rachunek wyrównawczy w technice cieplnej, Ossolineum, Katowice, (1984).
5. S. Hożejowska, M. Piasecka, M.E. Poniewski, Int. J. of Thermal Sciences, 48, 1049 (2009).