

Bartosz KOPICZAK, Kazimierz RUP

e-mail: krup@usk.pk.edu.pl

Instytut Inżynierii Ciepłej i Procesowej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki, Kraków

Analiza przepływu azotu w mikrokanale prostokątnym

Wstęp

W ostatnich latach obserwuje się gwałtowny rozwój miniaturyzacji urządzeń elektronicznych. Bardzo duży wpływ na proces miniaturyzacji wspomnianych urządzeń miał rozwój tzw. technologii krzemowej, który przyczynił się do produkcji mikroukładów mechanicznych znanych w literaturze jako układy mikroelektromechaniczne (MEMS) [1].

Z analizy przepływów płynu w mikrokanalach wynika, że podobnie jak przyścienny stanowi dużą część całego obszaru przepływu. Należy zaznaczyć, że w podobnym przyściennym interakcje cząstek płynu są w dużym stopniu odmienne od odpowiednich interakcji obserwowanych pozostałych podobozach. Z analizy wartości liczby *Knudsen* traktowanej jako kryterium ciągłości ośrodka płynnego wynika, że dla większości realizowanych przepływów płynów w mikrokanalach mogą być użyte rozwiązania równań *Naviera-Stokesa* pod warunkiem uwzględnienia poślizgu na ściankach [1].

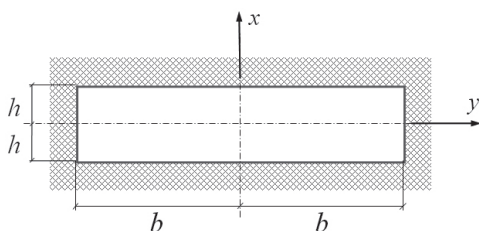
W pracy [2] zaproponowano analityczne rozwiązanie uproszczonego równania ruchu płynu w kanale prostokątnym. W rozwiązaniu uwzględniono człony rzędu II opisujące poślizg cząstek płynu na ściance mikrokanalu. Spadek ciśnienia w uformowanym przepływie laminarnym płynu nieściśliwego, realizowanego w mini i mikrokanalach był przedmiotem rozważań w pracy [3]. W szczególności zaproponowano przybliżony model obliczeń spadku ciśnienia w przepływach realizowanych w mikrokanalach o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego, uwzględniającego jednak tylko człony rzędu I opisujące poślizg na jego ściankach.

Przepływy w mikrokanalach były również przedmiotem wielu prac eksperymentalnych. W pracy [4] przeprowadzono przy użyciu aparatury *micro-PIV* pomiary profili prędkości przepływającego gazu w kanałach o przekroju prostokątnym. Podobne pomiary pola prędkości przeprowadzono w pracy [5]. Do pomiarów prędkości azotu w mikrokanale o przekroju prostokątnym opisanym wartością współczynnika kształtu $\alpha_1 = 0,35$ ($\alpha_1 = h/b$) zastosowano specjalną aparaturę *micro-PIV* [5].

W niniejszej pracy dokonano walidacji analitycznego rozwiązania równania *Poissona* opisującego przepływ azotu w mikrokanale o przekroju poprzecznym w kształcie prostokąta. W rozwiązaniu uwzględniono warunki brzegowe zawierające człony I i II rzędu opisujące poślizg cząstek płynu na ściance mikrokanalu. Rozważania przeprowadzone zostały dla dwóch modeli zderzeń międzycząsteczkowych – prostego modelu *VHS* (*Variable Hard Sphere*) oraz dokładniejszego modelu *VSS* (*Variable Soft Sphere*). Uzyskane rezultaty rozwiązania ścisłego porównano z odpowiednimi wynikami eksperymentalnymi dostępnymi w literaturze.

Analiza rozważanego przepływu

Rozważony będzie izotermiczny, ustalony przepływ gazu idealnego w mikrokanale o stałym polu przekroju poprzecznego, dla warunków brzegowych uwzględniających poślizg na ściankach (Rys. 1).



Rys. 1. Schemat analizowanego kanału przepływowego

Przepływ jest wywołany różnicą ciśnień w przekrojach wlotowym i wylotowym. Założono ponadto, że przepływ jest lokalnie w pełni rozwinięty, to znaczy profil prędkości w przekroju poprzecznym jest taki sam jak dla analogicznego rozwiniętego przepływu gazu nieściśliwego. Uwzględnia się natomiast za pomocą równania stanu w każdym przekroju poprzecznym zmianę gęstości gazu w zależności od ciśnienia i temperatury. Ostatnie założenie nie będzie obowiązywać w przypadku, gdy wartość liczby *Macha* będzie mniejsza od 0,3 [6]. Dla przepływu realizowanego w mikrokanale o przekroju prostokątnym jak na rys. 1 równanie wynikające z zasady pędu przyjmie dla ośrodka ciągłego we współrzędnych kartezjańskich następującą, bezwymiarową postać:

$$\alpha^2 \frac{d^2 u_z^*}{dx^{*2}} + \frac{d^2 u_z^*}{dy^{*2}} = -1 \quad (1)$$

gdzie:

$x^* = x/b$ – bezwymiarowa współrzędna w kierunku x ,

$y^* = y/b$ – bezwymiarowa współrzędna w kierunku y ,

$z^* = z/l$ – bezwymiarowa współrzędna w kierunku z ,

$u_z^* = u_z \left(-\frac{h^2}{\mu} \frac{dp}{dz} \right)^{-1}$ – bezwymiarowa prędkość płynu,

$\alpha^* = h/b$ – bezwymiarowy współczynnik geometryczny.

Dla jednoznacznego opisu rozważanego przepływu należy sformułować odpowiednie warunki brzegowe. Ze względu na małą wartość liczby *Knudsen* w rozważanych przepływach warunki brzegowe muszą uwzględniać poślizg cząstek płynu na ściankach mikrokanalu. Lokalna prędkość poślizgu jest proporcjonalna do lokalnego gradientu prędkości w kierunku normalnym do ściany mikrokanalu. Warunki brzegowe zawierające człon rzędu I dla przepływu przez mikrokanal o przekroju prostokątnym mają postać [7]:

$$u_z^* \Big|_{y^*=1} = -\frac{2-\sigma}{\sigma} 2Kn' \frac{du_z^*}{dy^*} \Big|_{y^*=1}, \quad u_z^* \Big|_{x^*=1} = -\frac{2-\sigma}{\sigma} 2\alpha Kn' \frac{du_z^*}{dx^*} \Big|_{x^*=1} \quad (2)$$

$$\frac{du_z^*}{dy^*} \Big|_{y^*=0} = 0, \quad \frac{du_z^*}{dx^*} \Big|_{x^*=0} = 0 \quad (3)$$

Występująca w zależnościach (2) i (3) liczba *Knudsen* jest definiowana za pomocą wzoru:

$$Kn' = \frac{\lambda}{2h} = \frac{\lambda}{4b(1+\alpha)} \quad (4)$$

Ulega ona jednak zmianie z zależnością:

$$Kn^* = Kn' \frac{(2-\sigma)}{\sigma} \quad (5)$$

Parametr λ to średnia droga cząsteczki do kolejnego zderzenia. Stała σ to współczynnik akomodacji pędu, który przyjmuje wartość z przedziału $\sigma \approx 0,87 \div 1$ [8]. Najczęściej w literaturze dla podobnych przypadków przepływu przyjmuje się $\sigma \approx 1$.

Wykorzystując metodę rozdzielania zmiennych, można rozwiązanie równania (1) wyrazić w postaci:

$$u_z^* = -\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x^*) \cos(\delta_n y^*), \quad (6)$$

gdzie:

δ_n – zbiór wartości własnych,

X_n – zbiór funkcji zależnych od współrzędnej x^* ,

$\cos(\delta_n y^*)$ – zbiór funkcji własnych.

Rozwiązanie (6) spełnia warunki brzegowe (2) i (3). Podstawiając rozwiązanie (6) i warunki (2) i (3) do równania (1) otrzymuje się:

$$u_z^* = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin(\delta_n) \cos(\delta_n y^*)}{\delta_n^2 (\delta_n + \sin(\delta_n) \cos(\delta_n))} \times$$

$$\times \left[\frac{\cosh((\delta_n/\alpha)x^*)}{\cosh(\delta_n/\alpha) + \frac{2-\sigma}{\sigma} \frac{4}{1+\alpha} Kn_{D_h} \delta_n \sinh(\delta_n/\alpha)} - 1 \right], \quad (7)$$

gdzie:
$$\delta_n \tan(\delta_n) = \frac{b}{\frac{2-\sigma}{\sigma} \frac{4}{1+\alpha} Kn_{D_h}}, \quad (8)$$

Z równania (8) można obliczyć wartości własne δ_n . Prędkość średnią otrzymuje się z następującej zależności:

$$\bar{u}_z^* = \frac{1}{A} \int u_z^* dA = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon \sin^2(\delta_n)}{\delta_n^4 (\delta_n + \sin(\delta_n) \cos(\delta_n))} \times \left[\frac{\sinh(\delta_n/\alpha)}{\cosh(\delta_n/\alpha) + \frac{2-\sigma}{\sigma} \frac{4}{1+\alpha} Kn_{D_h} \delta_n \sinh(\delta_n/\alpha)} - \frac{\delta_n}{\alpha} \right], \quad (9)$$

Wartość liczby *Poisseuile* 'a' obliczamy z zależności

$$Po = - \frac{D_h^2}{2\mu} \frac{dp}{dz} \frac{1}{u_z}, \quad (10)$$

Wyniesie ona w rozważanym przypadku:

$$Po_{NS1} = \frac{4}{(1+\alpha)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon \sin^2(\delta_n)}{\delta_n^4 (\delta_n + \sin(\delta_n) \cos(\delta_n))}} \times \frac{1}{\frac{\delta_n}{\alpha} - \frac{\sinh(\delta_n/\alpha)}{\cosh(\delta_n/\alpha) + \frac{2-\sigma}{\sigma} \frac{4}{1+\alpha} Kn_{D_h} \delta_n \sinh(\delta_n/\alpha)}}, \quad (11)$$

Przytoczone wyżej zależności (8), (9) i (11) zostały uzyskane przy warunkach brzegowych z poślizgiem zawierających człon I rzędu, słusznych w przypadku mniejszych wartości liczby *Knudsena*. W celu zwiększenia dokładności opisu oraz przystosowania rozwiązania do warunków, w których liczba *Knudsena* osiąga wyższe wartości, warunki brzegowe zostały rozszerzone o człon II rzędu. Warunki brzegowe z członem rzędu II wg *Deisslera* [9] przyjmują bezwymiarową postać:

$$u_z^* \Big|_{y^*=1} = - \frac{2-\sigma}{\sigma} 2Kn' \frac{\partial u_z^*}{\partial y^*} \Big|_{y^*=1} - \frac{9}{4} Kn'^2 \left(\frac{\partial^2 u_z^*}{\partial y^{*2}} \Big|_{y^*=1} - 1 \right), \quad (12)$$

$$u_z^* \Big|_{x^*=1} = - \frac{2-\sigma}{\sigma} 2\alpha^2 Kn' \frac{\partial u_z^*}{\partial x^*} \Big|_{x^*=1} - \frac{9}{4} Kn'^2 \left(\alpha^2 \frac{\partial^2 u_z^*}{\partial x^{*2}} \Big|_{x^*=1} - 1 \right), \quad (13)$$

Formuła (6) zaproponowana w formie pojedynczego rozwinięcia w szereg *Fouriera* nie wykazuje zbieżności z warunkami brzegowymi zawierającymi człon rzędu II [10]. W szczególności wartości własne równania (8) występujące w członie $\cos(\delta_n y^*)$ sprawiają, że funkcja nie jest ortogonalna w przedziale [-1,1]. Dlatego nową propozycją opisującą profil prędkości w mikrokanale jest [1]:

$$u_z^*(x^*, y^*) = \sum_{i,j=1}^{\infty} A_{ij} N_{ij} \cos(\varphi_i(x^*/\alpha)) \cos(\psi_j(y^*)) + (9/4) Kn'^2, \quad (14)$$

Wzór (14) bazuje na podwójnym rozwinięciu w szereg *Fouriera*. Funkcje $\omega_{ij}(x^*, y^*) = \cos(\varphi_i(x^*/\alpha)) \cos(\psi_j(y^*))$ są ortogonalne w obszarze [-1,1]x[-1,1]. Są one rozwiązaniami zagadnienia na wartości własne opisanego za pomocą wzorów (1), (12) oraz (13). Człony N_{ij} są dobrane w taki sposób aby wyrażenia $N_{ij} \cos(\varphi_i(x^*/\alpha)) \cos(\psi_j(y^*))$ były unormowane w obszarze [-1,1]x[-1,1].

Warunki brzegowe (13) oraz (14) wymagają aby funkcje φ_i i ψ_j były rozwiązaniami równań [2]:

$$1 - 2Kn' \frac{2-\sigma}{\sigma} \psi_j \tan(\psi_j) - \frac{9}{4} Kn'^2 \psi_j^2 = 0 \quad (15)$$

$$1 - 2Kn' \frac{2-\sigma}{\sigma} \varphi_i \tan\left(\frac{\varphi_i}{\alpha}\right) - \frac{9}{4} Kn'^2 \varphi_i^2 = 0 \quad (16)$$

W celu wyznaczenia współczynników A_{ij} , rozwiązanie (14) zostało podstawione do równania (1). Iloczyn $A_{ij} N_{ij}$ w rozwiązaniu (14) zapisano tak jak w [2].

Profil prędkości opisany za pomocą funkcji (14) z wykorzystaniem pierwiastków φ_i, ψ_j , obliczonych z równań (15) i (16) przy uwzględnieniu mniej niż 50 członów odwzorowuje z dużą dokładnością pole prędkości w mikrokanale o przekroju prostokątnym. W świetle powyższego wzór opisujący masowe natężenie przepływu przez mikrokanal o przekroju prostokątnym przy założeniu rozproszonego odbicia cząstek na jego ściankach przyjmie postać:

$$\dot{Q}_{m_{NS2}} = - \frac{\rho h^2}{\mu} \frac{dp}{dz} \frac{4h^2}{\alpha} \left[\sum_{i,j=1}^{\infty} A_{ij} N_{ij} \frac{\alpha \cos(\varphi_i(x^*/\alpha)) \cos(\psi_j(y^*))}{\varphi_i \psi_j} + \frac{9}{4} Kn'^2 \right] \quad (17)$$

W celu zapisania natężenia \dot{Q}_m jako funkcji ciśnienia na wlocie p_i oraz wylocie p_o mikrokanalu równanie (17) musi zostać scałkowane wzdłuż całej długości mikrokanalu. Dla przepływu izotermicznego przy znanych wymiarach geometrycznych mikrokanalu, liczba *Knudsena* zależy tylko od ciśnienia $p(z)$. Dlatego też rozwiązania φ_i i ψ_j zależą tylko od współrzędnej z mierzonej wzdłuż osi mikrokanalu. W równaniu (17) suma w nawiasie może być przybliżona za pomocą wielomianu $a1+a2Kn'+a3Kn'^2$, w którym współczynniki $a1, a2, a3$ zależą od współczynnika kształtu przekroju α oraz od współczynnika akomodacji pędu σ . Tak więc równanie (17) przyjmie postać:

$$\dot{Q}_{m_{NS2}} = - \frac{4ph^4}{\alpha RT \mu} \frac{dp}{dz} [a1 + a2Kn' + a3Kn'^2] \quad (18)$$

Przykładowe wartości współczynników $a1, a2, a3$ zostały obliczone przy wykorzystaniu metody najmniejszych kwadratów z uwzględnieniem wartości liczby *Knudsena* $Kn' \in [0,1]$. Omawiane wartości współczynników $a1, a2, a3$ zestawiono w tab. 1.

Tab. 1. Wartości współczynników $a1, a2, a3$ dla różnych wartości σ i α , dla warunków brzegowych zawierających człony II rzędu [1]

a	σ					
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0 a1=0,3333	a2=6,0000 a3=4,5000	a2=4,6667 a3=4,5000	a2=3,7143 a3=4,5000	a2=3,0000 a3=4,5000	a2=2,4444 a3=4,5000	a2=2,0000 a3=4,5000
0,01 a1=0,3212	a2=5,9694 a3=4,4528	a2=4,6459 a3=4,4542	a2=3,7007 a3=4,4548	a2=2,9917 a3=4,4550	a2=2,4405 a3=4,4549	a2=1,9993 a3=4,4549
0,025 a1=0,3280	a2=5,9228 a3=4,3840	a2=4,6140 a3=4,3875	a2=3,6797 a3=4,3887	a2=2,9788 a3=4,3895	a2=2,4337 a3=4,3896	a2=1,9977 a3=4,3892
0,05 a1=0,3228	a2=5,8420 a3=4,2761	a2=4,5591 a3=4,2813	a2=3,6423 a3=4,2843	a2=2,9547 a3=4,2858	a2=2,4201 a3=4,2858	a2=1,9925 a3=4,2853
0,1 a1=0,3312	a2=5,6774 a3=4,0697	a2=4,4431 a3=4,0832	a2=3,5613 a3=4,0906	a2=2,9000 a3=4,0943	a2=2,3860 a3=4,0952	a2=1,9751 a3=4,0944
0,25 a1=0,2808	a2=5,1332 a3=3,6073	a2=4,0464 a3=3,6287	a2=3,2675 a3=3,6449	a2=2,6823 a3=3,6560	a2=2,2267 a3=3,6626	a2=1,8626 a3=3,6647
0,35 a1=0,2808	a2=4,7776 a3=3,5039	a2=3,7686 a3=3,5207	a2=3,0453 a3=3,5353	a2=2,5009 a3=3,5478	a2=2,0755 a3=3,5595	a2=1,7334 a3=3,5705
0,5 a1=0,2286	a2=4,2443 a3=3,3489	a2=3,3519 a3=3,3588	a2=2,7120 a3=3,3708	a2=2,2289 a3=3,3856	a2=1,8487 a3=3,4048	a2=1,5395 a3=3,4292
1 a1=0,1405	a2=3,1207 a3=3,3104	a2=2,4552 a3=3,3176	a2=1,9782 a3=3,3287	a2=1,6187 a3=3,3438	a2=1,3364 a3=3,3644	a2=1,1077 a3=3,3908

Wykorzystując założenie o stałości iloczynu $Kn'p$, równanie (17) po scałkowaniu przyjmie postać:

$$\dot{Q}_{m_{NS2}} = \frac{4p_0^2 h^4}{\alpha RT \mu l} \left[\frac{a1}{2} (\Pi^2 - 1) + a2Kn'_0 (\Pi - 1) + a3Kn_0'^2 \ln(\Pi) \right] \quad (19)$$

W postaci bezwymiarowej zależność (19) zapiszemy:

$$\dot{Q}_{m_{NS2}}^* = 1 + \frac{a2}{a1} Kn'_0 \frac{1}{(\Pi - 1)} + \frac{a3}{a1} Kn_0'^2 \frac{\ln(\Pi)}{(\Pi^2 - 1)} \quad (20)$$

Analizując równanie (18) zauważyć można, że strumień masy jest silnie zależny od współczynnika kształtu przekroju α . Dla wartości α mniejszych od 0,01 do obliczeń zastosować można prostszy model, tzw. model przepływu płaskiego, w którym prędkości zależą tylko od wysokości kanału. Gdy współczynnik α przyjmuje wyższe wartości, do obliczeń wykorzystany powinien zostać wyżej opisany model.

Przykłady przepływów azotu w mikrokanalach

Dla zilustrowania powyższych rozważań przyjęto do obliczeń mikrokanaly o wymiarach: szerokość $2b_1 = 20$ [μm] oraz wysokość $2h_1 = 1$ [μm] i $2b_2 = 54$ [μm] oraz $2h_2 = 19,1$ [μm] odpowiednio. Pola przekroju poprzecznego wynoszą odpowiednio $A_1 = 20$ [μm²] i $A_2 = 1031,4$ [μm²]. Długość rozważanych mikrokanalów wynosiła: $l_1 = 5$ [mm], $l_2 = 27$ [mm]. Współczynnik kształtu przekroju poprzecznego $\alpha = h/b$ wynosił odpowiednio: $\alpha_1 = 0,05$ i $\alpha_2 = 0,35$. Parametry przepływu oraz parametry opisujące właściwości fizyczne azotu zestawiono w tab. 2.

Tab. 2. Parametry przepływu oraz parametry fizyczne azotu w warunkach przepływu

α	A [μm ²]	p_i [MPa]	p_o [MPa]	T [K]	R [J/kgK]	
α_1	20	0,2	25	350	296,81	
α_2	1031,4	0,05	0,01	297	296,81	
α	$\mu_{VSS}(T)$ [Pa·s]	$\mu_{VSS}(T)$ [Pa·s]	$\lambda_{i,VSS}$ [nm]	$\lambda_{o,VSS}$ [nm]	$\lambda_{i,HS}$ [nm]	$\lambda_{o,HS}$ [nm]
α_1	$1,87 \cdot 10^{-5}$	34,09	272,79	38,56	272,79	$1,98 \cdot 10^{-5}$
α_2	$1,71 \cdot 10^{-5}$	109,94	549,77	129,64	648,22	$1,74 \cdot 10^{-5}$

Jak wspomniano wcześniej, analizowany przepływ wywołany jest gradientem ciśnienia. Ciśnienie panujące na wlocie wynosi p_i , ciśnienie na wylocie mikrokanalu wynosi odpowiednio p_o .

Liczba *Knudsen* Kn jest ściśle związana ze średnią drogą cząsteczki λ i średnicą hydrauliczną D_h . W przypadku rozważanych przekrojów średnice hydrauliczne wynoszą:

$$D_h^{(1)} = 4 \cdot \frac{b^{(1)}h^{(1)}}{b^{(1)} + h^{(1)}} = 1,90[\mu m]; \quad D_h^{(2)} = 4 \cdot \frac{b^{(2)}h^{(2)}}{b^{(2)} + h^{(2)}} = 28,22[\mu m];$$

Korzystając z zależności charakterystycznych dla modelu zderzeń międzycząsteczkowych VSS wyliczono wartości liczby *Knudsen* odpowiednio na wlocie i na wylocie mikrokanalu dla obu rozważanych przypadków mikrokanalów:

$$Kn_{i,VSS}^{(1)} = \frac{\lambda_{i,VSS}^{(1)}}{2h^{(1)}} = 0,0341; \quad Kn_{o,VSS}^{(1)} = \frac{\lambda_{o,VSS}^{(1)}}{2h^{(1)}} = 0,2727;$$

$$Kn_{i,VSS}^{(2)} = \frac{\lambda_{i,VSS}^{(2)}}{2h^{(2)}} = 0,0057; \quad Kn_{o,VSS}^{(2)} = \frac{\lambda_{o,VSS}^{(2)}}{2h^{(2)}} = 0,0287;$$

Odpowiednie wartości liczby *Knudsen* na wlocie i na wylocie mikrokanalów dla modelu zderzeń międzycząsteczkowych HS wynoszą

$$Kn_{i,HS}^{(1)} = \frac{\lambda_{i,HS}^{(1)}}{2h^{(1)}} = 0,0409; \quad Kn_{o,HS}^{(1)} = \frac{\lambda_{o,HS}^{(1)}}{2h^{(1)}} = 0,3273;$$

$$Kn_{i,HS}^{(2)} = \frac{\lambda_{i,HS}^{(2)}}{2h^{(2)}} = 0,0067; \quad Kn_{o,HS}^{(2)} = \frac{\lambda_{o,HS}^{(2)}}{2h^{(2)}} = 0,0339;$$

Z porównania wyliczonych wartości liczby *Knudsen* wynika, że dla modelu zderzeń międzycząsteczkowych HS przyjmują one wyraźnie większą wartość od odpowiednich dla modelu VSS. Ze względu na mniejsze, wyliczone wartości liczby *Knudsen* dla modelu VSS, w dalszych rozważaniach tylko te wartości będą analizowane.

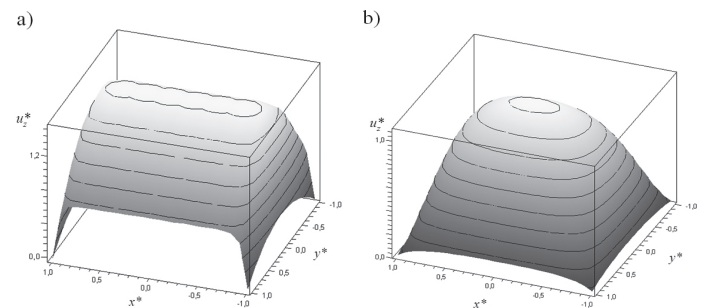
Profil bezwymiarowej prędkości przepływu w mikrokanale opisuje równanie (14). Warto zauważyć, że funkcja $u_z(x^*, y^*)$ opisująca lokalne wartości prędkości w przekroju poprzecznym mikrokanalu jest wyrażona za pomocą podwójnego rozwinięcia w szereg *Fouriera*. Aby skrócić za pomocą omawianego rozwiązania $u_z(x^*, y^*)$, należało wcześniej wyznaczyć około 50 pierwiastków dla funkcji własnych ϕ_i i ψ_j z równań (15) i (16).

Dla potrzeb niniejszej pracy napisano specjalny algorytm obliczeniowy, służący do wyznaczania wartości własnych wspomnianych funkcji własnych ϕ_i i ψ_j . Do wyznaczenia pierwiastków funkcji własnych ϕ_i i ψ_j wykorzystana została metoda bisekcji (połowienia). Ważną zaletą metody jest jej niezależność od znaku II pochodnej, w przeciwieństwie do metody siecznych czy stycznych (*Newtona*). W przypadku badanych przedziałów izolacji, w każdym występuje punkt przecięcia co dyskwalifikuje szybsze metody. Komplet wyliczonych wartości własnych dla funkcji własnych ϕ_i i ψ_j dla współczynnika $\alpha_1 = 0,05$ zestawiono w tab. 3.

Tab. 3. Kolejne 50 wartości własnych funkcji ϕ_i i ψ_j dla $\alpha = 0,05$

i	ψ_j	ϕ_i	i	ψ_j	ϕ_i	i	ψ_j	ϕ_i	i	ψ_j	ϕ_i	i	ψ_j	ϕ_i
1	1,484	0,544	11	34,004	11,410	21	64,893	23,323	31	96,142	34,248	41	127,476	45,262
2	4,448	1,633	12	37,050	12,493	22	68,010	24,410	32	99,273	35,347	42	130,611	46,366
3	7,403	2,721	13	40,111	13,575	23	71,130	25,498	33	102,404	36,446	43	133,747	47,471
4	10,344	3,809	14	43,184	14,657	24	74,252	26,588	34	105,536	37,546	44	136,884	48,576
5	13,271	4,897	15	46,267	15,739	25	77,375	27,679	35	108,669	38,647	45	140,020	49,681
6	16,189	5,984	16	49,358	16,821	26	80,500	28,771	36	111,803	39,748	46	143,157	50,787
7	19,108	7,071	17	52,456	17,903	27	83,626	29,864	37	114,937	40,850	47	146,294	51,892
8	24,994	8,157	18	55,559	18,985	28	86,753	30,959	38	118,071	41,952	48	149,431	52,998
9	27,973	9,242	19	58,667	20,068	29	89,882	32,054	39	121,205	43,055	49	152,568	54,105
10	30,978	10,326	20	61,778	21,152	30	93,011	33,151	40	124,340	44,158	50	155,706	55,211

Na rys. 2 przedstawiono wyznaczony, przestrzenny profil prędkości azotu w przekroju poprzecznym mikrokanalu w kształcie prostokąta, dla którego parametr wynosi $\alpha_1 = 0,05$. W zależności $u_z(x^*, y^*)$ uwzględniono poślizg na ścianie opisany warunkami brzegowymi zawierającymi człony rzędu II.



Rys. 2. Wyznaczone profile składowej wzdłużnej prędkości dla warunków brzegowych zawierających człony II rzędu a) mikrokanal o współczynniku $\alpha_1 = 0,05$; b) mikrokanal o współczynniku $\alpha_2 = 0,35$

Warto zaznaczyć, że maksymalne wartości prędkości u_z^* na rys. 2 przedstawione są za pomocą linii o małej gładkości. Omawiany falowany kształt krzywej opisującej maksymalną wartość prędkości u_z^* wynika z istnienia w jej zapisie członu $\cos(\phi_i(x^*/\alpha))$, w którym występuje stosunkowo mała wartość współczynnika α_1 .

Dla większych wartości α_1 zafalowanie analizowanej krzywej będzie pomijalnie małe. Jak pokazano na rys. 2b w przypadku wartości współczynnika kształtu wynoszącego $\alpha_2 = 0,35$ omawiane zafalowanie krzywej opisującej maksymalną wartość prędkości nie występuje. W przypadku bardzo małych wartości współczynnika α zaleca się przyjęcie modelu przepływu płaskiego.

Liczbę *Poisueille'a* dla mikrokanalu o przekroju prostokątnym definiuje równanie (11). Po podstawieniu odpowiednich wartości dla poszczególnych wielkości występujących we wzorze (11) otrzymano:

$$Po_i^{(1)} = 23,6750; \quad Po_o^{(1)} = 15,0261;$$

$$Po_i^{(2)} = 23,7280; \quad Po_o^{(2)} = 19,4524;$$

Rozważając mikrokanal o długości l , ciśnieniu na wejściu p_i oraz ciśnieniu na wyjściu p_o , oraz po zaniedbaniu wpływu efektu wlotowego, z równania (19) można obliczyć masowe natężenie przepływu. Jest ono zależne od współrzędnej z (oś mikrokanalu), z uwagi na zmieniającą się liczbę *Knudsen* wraz ze zmianami ciśnienia. Ze względu na zakres wartości liczby *Knudsen* zastosowane mogą być w tym przypadku tylko warunki brzegowe zawierające człony rzędu II. Występujące we wzorze (19) wartości stałych a_1, a_2 i a_3 podano w tab. 3. W rozważanym przypadku dla przepływów z uwzględnieniem współczynników kształtu $\alpha_1 = 0,05$ oraz odpowiednio $\alpha_2 = 0,35$ wynoszą one:

$$a_1^{(1)} = 0,3228; \quad a_2^{(1)} = 1,9925; \quad a_3^{(1)} = 4,2853;$$

$$a_1^{(2)} = 0,2599; \quad a_2^{(2)} = 1,7334; \quad a_3^{(2)} = 3,5705;$$

Podstawiając wartości dla poszczególnych wielkości wyznaczono:

$$\dot{Q}_{m_{NS_2}}^{(1)} = 4,426 \cdot 10^{-6} \left[\frac{mg}{s} \right]; \quad \dot{Q}_{m_{NS_2}}^{(2)} = 9,071 \cdot 10^{-4} \left[\frac{mg}{s} \right];$$

Względny (procentowy) przyrost masowego natężenia przepływu wynikający z uwzględnienia poślizgu na ściankach jest równy stosunkowi masowego natężenia przepływu (19) do masowego natężenia przepływu (20) otrzymanego z hipotezy o przepływie bez poślizgu. W przypadku rozważanego mikrokanalu prostokątnego względny przyrost masowego natężenia przepływu opisuje równanie (20). Po podstawieniu odpowiednich wartości dla poszczególnych wielkości we wzroze (20) otrzymano wartość względnego przyrostu masowego natężenia przepływu w kanale prostokątnym z uwzględnieniem poślizgu cząstek azotu na ściankach kanału. Względny przyrost masowego natężenia przepływu w rozważanych przypadkach wynosi:

$$\dot{Q}_{m_{NS_2}}^{*(1)} = \frac{\dot{Q}_{m_{NS_2}}^{(1)}}{\dot{Q}_{ns}^{(1)}} = 1,469; \quad \dot{Q}_{m_{NS_2}}^{*(2)} = \frac{\dot{Q}_{m_{NS_2}}^{(2)}}{\dot{Q}_{ns}^{(2)}} = 1,060;$$

Jak widać, uwzględnienie poślizgu cząstek azotu na ściankach rozważanego mikrokanalu zwiększa o około 47% wyznaczone natężenie przepływu w przypadku mikrokanalu o współczynnika kształtu $\alpha_1 = 0,05$ a dla $\alpha_2 = 0,35$ przyrost wynosi około 6%.

W celu weryfikacji otrzymanych wyników, uzyskanych w niniejszej pracy z metody analitycznej, przytoczono dostępne z literatury rezultaty badań eksperymentalnych [5]. W szczególności wykorzystane zostały badania eksperymentalne dotyczące przepływu azotu w mikrokanale o przekroju prostokątnym opisanym wartością współczynnika kształtu $\alpha_2 = 0,35$ [5]. Ciśnienie na wlocie i wylocie z mikrokanalu było równe odpowiednio: $p_i^{(1)} = 50$ [kPa] i $p_o^{(1)} = 10$ [kPa]. Długość odcinka wlotowego wynosiła 10 [mm]. Jest ona wystarczająco duża w stosunku do całkowitej długości mikrokanalu wynoszącej $l = 27$ [mm], aby można było pominąć efekt wlotowy w mikrokanale. Zmierzone wymiary geometryczne mikrokanalów zestawione są w tab. 4.

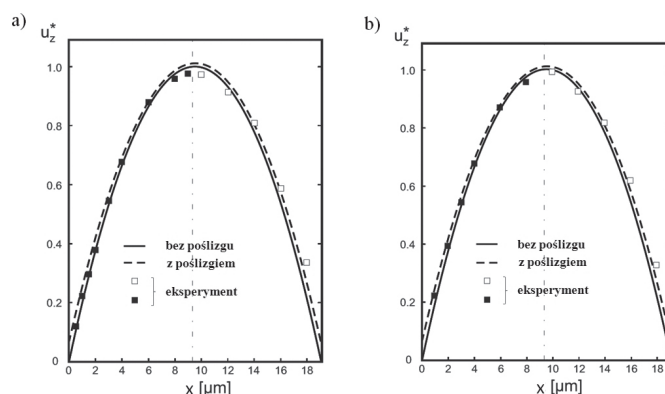
Tab. 4. Wymiary geometryczne mikrokanalów wykorzystanych w pracy [5]

Mikrokanal	Szerokość b [μm]	Wysokość h [μm]	Stosunek geometryczny α	Długość l [mm]
M1	54,0±0,1	19,1±0,1	0,35	27,90±0,02
M2	54,0±0,1	19,1±0,1	0,35	26,62±0,02

Obydwa mikrokanaly zastosoane w eksperymencie zostały wykonane z poli(dimetylosiloksanu) – PDMS o właściwościach hydrofobicznych, przy wykorzystaniu klasycznych technik litograficznych. Wytrawione mikrokanaly zostały ustawione na szklanym podłożu, a następnie spojone (uszczelnione) z tym podłożem przez napylenie jonów tlenkowych [5]. W pracy [5] wykonano do badań celowo dwa modele mikrokanalu, aby wyeliminować ewentualne elementy niepewności w przeprowadzanych pomiarach.

Porównanie profili prędkości wyznaczonych na podstawie eksperymentu w mikrokanale M1 i M2 z odpowiednimi rezultatami wyznaczonymi z rozwiązania analitycznego ścisłego przedstawiono na rys. 3a i b. Kwadratami oznaczono zmierzone wartości prędkości w pracy [5]. Za pomocą linii ciągłej przedstawiono profil składowej wzdłużnej prędkości wyznaczony na podstawie rozwiązania analitycznego ścisłego równania Poissona (2) bez uwzględnienia poślizgu cząstek płynu na ściankach mikrokanalu. Profil oznaczony linią ciągłą zwany jest w literaturze profilem Poisseuille'a. Uzyskane w niniejszej pracy rezultaty rozwiązania analitycznego ścisłego z uwzględnieniem poślizgu cząstek na ścianach mikrokanalu, wyrażonego za pomocą członów rzędu II, przedstawiono na rys. 3a i b za pomocą linii przerywanej.

W obu przypadkach rezultaty uzyskane w niniejszej pracy bardzo dobrze przybliżają odpowiednie wyniki otrzymane w eksperymencie przytoczonym w pracy [5]. Na szczególną uwagę zasługuje zgodność porównywanych wyników w obszarze bliskim ścianki mikrokanalu. Dodatkowo należy zwrócić uwagę na fakt braku symetrii profilu prędkości wyznaczonego eksperymentalnie w porównaniu do odpowiedniego profilu otrzymanego z obliczeń. Wspomniana różnica wynika stąd, że w badaniach eksperymentalnych ścianki mikrokanalu zostały wykonane z dwóch różnych materiałów, natomiast w obliczeniach teoretycznych zakładano materiał jednolity. W związku z tym, w przypadku eksperymentu, współczynnik akomodacji σ zmienia swą wartość na



Rys. 3. Eksperymentalne i teoretyczne profile prędkości płynu: a) porównanie rezultatów z eksperymentu w mikrokanale M1; b) porównanie rezultatów z eksperymentu w mikrokanale M2

ściankach w zależności od materiału. Zaobserwować można, że przy ściance szklanej ($x = 0$ [μm]) skok prędkości jest dużo mniejszy niż ma to miejsce w przypadku ścianki krzemowej ($x = 19,1$ [μm]). Profil teoretyczny wyznaczony był dla współczynnika akomodacji σ ścian wykonanych z krzemu. Widać zatem, że uwzględnienie w warunkach brzegowych poślizgu cząstek na ściankach mikrokanalu jest jak najbardziej uzasadnione i nie powinno być pomijane.

Podsumowanie i wnioski

W pracy dokonano analizy przepływu azotu uwzględniając rozwiązanie analityczne ścisłe w postaci podwójnego rozwinięcia w szereg Fouriera. Aby wykorzystać wzięte z literatury rozwiązanie analityczne ścisłe należało wyznaczyć wartości własne odpowiednich funkcji własnych występujących w tym rozwiązaniu. W szczególności trzeba było rozwiązać układ dwóch równań na wartości własne wyznaczając 50 pierwszych ich pierwiastków. Dla celów rozwiązania wspomnianego układu opracowano własny algorytm numeryczny realizowany za pomocą pakietu MAPLE.

Procentowy względny przyrost wartości natężenia przepływu w omawianym mikrokanale o mniejszych wymiarach wynosił 46,9%. Wartość liczby Reynoldsa dla tego przepływu wynosiła $Re^{(1)} = 0,021$. Ze względu na dostępne w literaturze rezultaty prac doświadczalnych dotyczących przepływów w mikrokanale o wymiarach $b = 54$ [μm] i $h = 19,1$ [μm], dokonano w niniejszej pracy dodatkowych obliczeń w celu wyznaczenia wartości odpowiednich wielkości do porównań. W przypadku mikrokanalu o większych wymiarach, odpowiedni przyrost masowego natężenia przepływu wynosił 6%. Natomiast wartość liczby Reynoldsa wynosiła $Re^{(2)} = 1,8$.

Z przedstawionych na rys. 3a i b porównań wynika, że uzyskane w niniejszej pracy rezultaty wykazują wysoki stopień zgodności z odpowiednimi wynikami prac eksperymentalnych [5].

LITERATURA

- [1] S. G. Kandlikar, S. Garimella, D. Li, S. Colin, M. King: Heat transfer and fluid flow in minichannels and microchannels. Elsevier Ltd., Oxford 2006.
- [2] C. Aubert, S. Colin: Microscale Thermophysical Engineering 5, nr 1, 41 (2001).
- [3] M. Bahrami, M. M. Yovanovich, J. R. Culham: Transaction of the ASME – Journal of Fluids Engineering. 128, nr 3, 652 (2006).
- [4] D. C. Tretheway, C. D. Meinhardt: Physics of Fluids 14, nr 3, L9 (2002).
- [5] X. Zheng, Z. Silber-Li: Experiments in Fluids, 44, nr 6, 951 (2008).
- [6] N.-T. Nguyen, S. T. Wereley: Fundamental and Applications of Microfluidics. Artech House, London 2002.
- [7] G. A. Bird: Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows. Clarendon Press, Oxford 1978 & 1998.
- [8] Z. Y. Guo, X. B. Wu: Microscale Thermophysical Engineering 2, nr 2, 111 (1998).
- [9] R. G. Deissler: Int. J. Heat Mass Transfer 7, nr 6, 681 (1964).
- [10] S. Colin: Microfluidique. Hermès Science Publications, Paris 2004.
- [11] W. M. Rohsenow, H. Y. Choi: Heat, mass and momentum transfer. Prentice-Hall Inc, New Jersey 1961.
- [12] W. A. Ebert, E. M. Sparrow: J. Basic Eng., 1018 (1965).