

## Zbigniew MATRAS

e-mail: zmatras@mech.pk.edu.pl

Instytut Inżynierii Ciepłej i Procesowej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Krakowska, Kraków

## Zmodyfikowana charakterystyka przepływowa płynu nienewtonowskiego

## Wstęp

Do określenia własności reologicznych reostabilnego płynu nienewtonowskiego trzeba dokonać pomiaru krzywej płynięcia za pomocą reometru. Konstrukcja każdego reometru oparta jest na zasadzie, że realizowany jest w nim przepływ wiskozymetryczny, tj. taki przepływ, dla którego znane jest dokładne rozwiązanie różniczkowych równań ruchu i ciągłości. Z tego względu pomiary reologiczne są prowadzone dla szczególnie prostych przypadków przepływu, dla których różne od zera składowe prędkości występują tylko w jednym, narzuconym geometrią przyrządu, kierunku. Z reguły wykorzystuje się przepływ *Poiseuille'a* w kapilarze oraz przepływ *Couette'a* w szczelinie między dwiema, obracającymi się względem siebie ściankami o różnych geometriach [Walters, 1975; Leblanc i in., 1999].

Z uwagi na ograniczony i z reguły bardzo mały wymiar szczeliny pomiarowej w reometrze rotacyjnym lub średnicy kapilary w reometrze kapilarnym, zastosowanie tego rodzaju przyrządów do badania krzywych płynięcia nienewtonowskich zawiesin, roztworów koloidalnych, mieszanin wielofazowych itp. cieczy jest poważnie ograniczone i w wielu przypadkach niemożliwe [Leblanc i in., 1999]. Niejednorodność struktury badanej cieczy nienewtonowskiej sprawia, że pomiary krzywej płynięcia mogą być obciążone dużymi, trudnymi do zaakceptowania błędami. Dodatkową trudność metrologiczną w tym zakresie może sprawić postępująca w czasie sedymentacja lub rozwarstwianie się substancji wchodzących w skład badanej cieczy. Poszukiwanie, zatem innych, niekonwencjonalnych metod identyfikacji reologicznej tego rodzaju cieczy, które dawałyby gwarancję wyeliminowania trudności związanych z niejednorodnością i pozwalałyby na wiarygodną ocenę własności reologicznych płynu o złożonej strukturze wewnętrznej jest zdaniem autora celowe.

## Transformacja zmiennych fizycznych

Założono, że przepływająca ciecz spełnia potęgowe prawo tarcia wewnętrznego *Ostwalda – de Waele*. Wtedy, w zakresie laminarnym rurowa krzywa płynięcia przyjmuje postać

$$\frac{DAP}{4L} = K \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^n \left( \frac{8V}{D} \right)^n \quad (1)$$

Zastosowano pseudonewtonowski model przepływu nienewtonowskiej cieczy potęgowej w rurze [Matras, 2001]. Wtedy, w układzie zmodyfikowanych liczb kryterialnych [Matras, 2001] równ. (1) przyjmuje postać

$$c_{fM} = \left( \frac{16}{Re_M} \right) \quad (2)$$

W ustabilizowanym zakresie turbulentnym, tj. w przedziale  $3100 < Re_M < 10^5$  krzywa oporów opisana jest równaniem *Blasiusa*

$$c_{fM} = \left( \frac{0,079}{Re_M^{0,25}} \right) \quad (3)$$

gdzie zmodyfikowana liczba *Reynoldsa*

$$Re_M = \frac{D^n v^{2-n} \rho}{K \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^n 8^{n-1} \left[ \frac{2(n+1)}{3n+1} \right]^{2,5}} \quad (4)$$

i zmodyfikowany współczynnik oporów *Fanninga*

$$c_{fM} = \frac{\frac{DAP}{4L} \left[ \frac{2(n+1)}{3n+1} \right]^{2,5}}{\rho v^2} \quad (5)$$

Po uwzględnieniu w równ. (3) wzorów (4) i (5) można je przekształcić do postaci wymiarowej

$$\frac{DAP}{4L} = 0,001038 \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{n/4} \left[ \frac{2(n+1)}{3n+1} \right]^{-15/8} D^{3/2} \rho^{3/4} K^{1/4} \left( \frac{8V}{D} \right)^{(n+6)/4} \quad (6)$$

lub 
$$T = C \left( \frac{8V}{D} \right)^n \quad (7)$$

gdzie 
$$T = 12835,7 \frac{D^4 AP^4}{L^4 \rho^3 u_m^6} \quad (8)$$

natomiast stała *C* określona jest za pomocą wzoru

$$C = \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^n \left[ \frac{2(n+1)}{3n+1} \right]^{-15/2} K \quad (9)$$

Sprawdzono tym samym pęk krzywych (6) do jednej krzywej niezależnej od średnicy rury. Równ. (7) obowiązuje w turbulentnym zakresie przepływu. Równ. (7) stanowi merytoryczną podstawę, proponowanej w tej pracy metody wyznaczania stałych reologicznych *K* i *n* na podstawie doświadczalnie zmierzonych objętościowych wydatków przepływu i towarzyszących im spadków ciśnienia w zakresie turbulentnym. Stosując metodę regresji liniowej w odniesieniu do danych przedstawionych w układzie podwójnie logarymicznym łatwo można określić stałe *C* i *n* oraz dalej, z równ. (9) stałą konsystencji *K*

$$K = \left( \frac{4n}{3n+1} \right)^n \left[ \frac{2(n+1)}{3n+1} \right]^{15/2} C^4 \quad (10)$$

Przekształcono teraz rurową krzywą płynięcia (1) uzyskaną w zakresie laminarnym do postaci wyrażającej zależność

$$T = f \left( \frac{8V}{D} \right) \quad (11)$$

Po skojarzeniu równań (1) i (8) otrzymuje się

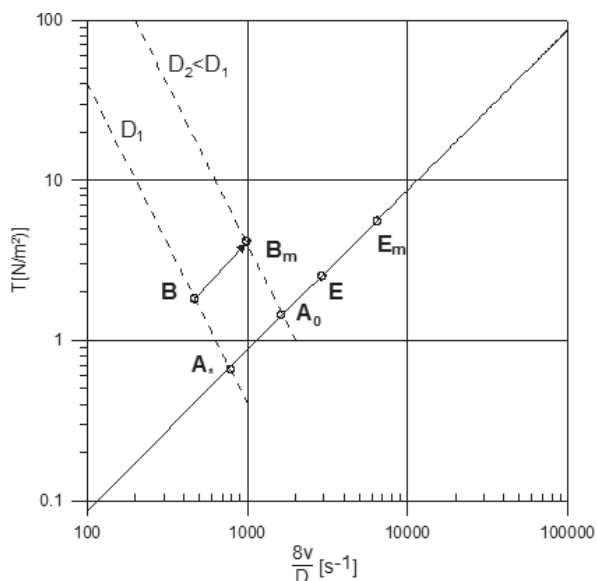
$$T = 963,38^4 \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{4n} \frac{K^4}{\rho^3 D^6} \left( \frac{8V}{D} \right)^{4n-6} \quad (12)$$

Równ. (12) obowiązuje w zakresie laminarnym i przedstawia jednoparametrową rodzinę krzywych badanej cieczy, przy czym parametrem jest średnica rury *D*. Założenie o równoległości krzywych (12) w zakresie laminarnym łatwo można zweryfikować dokonując kolejnej transformacji zmiennych fizycznych. W tym celu wyznacza się współrzędne  $\left[ \left( \frac{8V}{D} \right), T \right]$  punktu A (Rys. 1) przecięcia krzywej (7) z krzywą (12) odpowiadającą dowolnej, wybranej średnicy rury *D*. Wynoszą one odpowiednio:

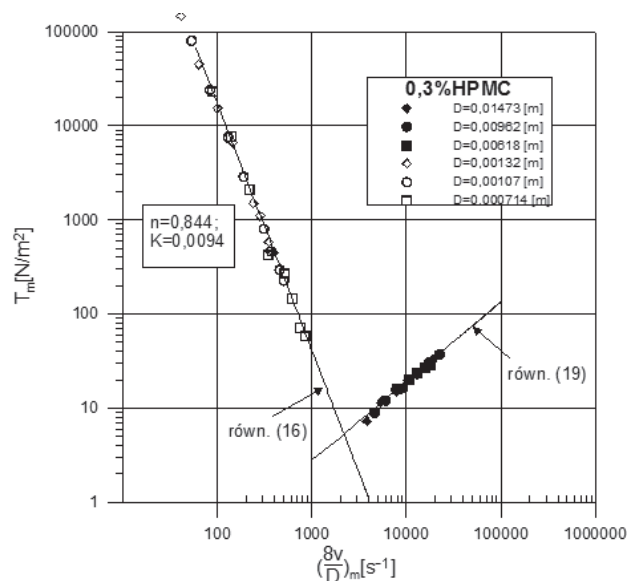
$$\left( \frac{8V}{D} \right)_A = \left\{ \frac{1}{963,38^4} \left( \frac{\rho D^2}{K \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^n \left[ \frac{2(n+1)}{3n+1} \right]^{15/2}} \right)^3 \right\}^{\frac{n}{3(n-2)}} \quad (13)$$

$$T_A = K \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^n \left[ \frac{2(n+1)}{3n+1} \right]^{-15/2} \left\{ \frac{\left( \frac{\rho D^2}{K} \right)^3}{963,38^4 \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{3n} \left[ \frac{2(n+1)}{3n+1} \right]^{15/2}} \right\}^{\frac{n}{3(n-2)}} \quad (14)$$

Przyjęto arbitralnie pewien punkt  $A_0$  na krzywej (7) odpowiadający rurowej szybkości ścinania  $\left( \frac{8V}{D} \right)_0$ . W punkcie tym krzywa (12) wyzna-



Rys. 1. Schemat transformacji zmiennych fizycznych



Rys. 2. Zmodyfikowana charakterystyka przepływu 0,3% roztworu HPMC

czona za pomocą rury o średnicy  $D_0$  przecina krzywą (7). Niech wartość tej współrzędnej  $(\frac{8v}{D})_0 = 2100 \text{ s}^{-1}$ . Wtedy, zgodnie

$$z (7) \quad T_0 = 2100^n \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^n \left[ \frac{2(n+1)}{3n+1} \right]^{15/2} K \quad (15)$$

Poprowadzono następnie przez punkt  $A_0$  krzywą (prostą w układzie podwójnie logarytmicznym), równoległą do krzywej (12), (Rys. 1). Oznacza to, że wykładniki potęgowe obydwu krzywych będą takie same i wynosić będą  $(4n - 6)$ . Równanie tej krzywej przyjmie postać następującą:

$$T_m = 963,38^4 \left( \frac{3n+1}{4n} \right)^{4n} \frac{K^4}{\rho^3 D^6} \left( \frac{8v}{D} \right)_m^{4n-6} \quad (16)$$

Celem zdefiniowania nowo wprowadzonych zmiennych fizycznych  $(\frac{8v}{D})_m$  i  $T_m$  dokonano transformacji układu współrzędnych żądając, aby dowolny punkt  $B \left[ \left( \frac{8v}{D} \right), T \right]$  przemieścić się do punktu  $B_m \left[ \left( \frac{8v}{D} \right)_m, T_m \right]$  (Rys. 1) i punkt  $A_s \left[ \left( \frac{8v}{D} \right)_s, T_s \right]$  – do punktu  $A_0 \left[ \left( \frac{8v}{D} \right)_0, T_0 \right]$ . Wtedy oczywiście każdy punkt  $E$  krzywej (7) zostanie przeniesiony do punktu  $E_m$ . Reguły transformacyjne, czyniące temu zadość, muszą mieć postaci następujące:

$$\left( \frac{8v}{D} \right)_m = \left( \frac{8v}{D} \right)_0 \left( \frac{8v}{D} \right)_s \quad (17)$$

$$T_m = \frac{T_0}{T_s} T \quad (18)$$

a jednoparametrowa rodzina krzywych (12) sprowadzi się – w układzie zmodyfikowanym – do pojedynczej krzywej (16), natomiast krzywa (7) ulegnie przekształceniu do również pojedynczej krzywej w tym samym układzie, tj.

$$T_m = C \left( \frac{8v}{D} \right)_m^n \quad (19)$$

### Weryfikacja doświadczalna metody i wnioski

Przedmiotem weryfikacji metody było zbadanie czy krzywa opisana równ. (16) i (19) faktycznie reprezentuje pojedynczą krzywą. Reprezentatywne wyniki badań doświadczalnych dotyczące laminarnego i turbulentnego przepływu 0,3% wodnego roztworu hydroksypropylo-

metylcelulozy (HPMC) w rurach i kapilarach o różnych średnicach wewnętrznych przedstawiono na rys. 2.

Badania wykonano za pomocą reometru kapilarno-rurowego własnej konstrukcji [Matras, 2003]. Punkty doświadczalne uzyskane w wyniku pomiarów układają się wzdłuż krzywych (16) lub (19) wskazując zakres przepływu bez konieczności uprzedniego obliczenia wartości liczb *Reynoldsa*. Stanowi to podstawową zaletę proponowanej metody identyfikacji reologicznej cieczy.

Metoda oparta na równ. (7) może okazać się szczególnie przydatna w przypadkach, gdy badaną cieczą jest niejednorodna zawiesina lub układ wielofazowy, dla którego określenie lepkości lub stałych reologicznych w skali makro jest sprawą kluczową. Paradoksalnie, ruch turbulentny przeciwdziała sedymentacji cząstek stałych, sprzyja wymieszaniu cieczy i jej homogenizacji. Dlatego m.in. zastosowanie reometru rurowego, w którym znacznie łatwiej jest spełnić warunek  $Kn < 0,01$  ( $Kn = d/D$ ;  $d$  – średnica Sautera) do analizy krzywych (7) lub (19) może okazać się preferowaną metodą wyznaczania stałych  $n$  i  $K$ .

### Oznaczenia

- $C$  – stała w równ. (9),  $[\text{Ns}^n/\text{m}^2]$
- $D$  – średnica rury,  $[\text{m}]$
- $K$  – stała konsystencji,  $[\text{Ns}^n/\text{m}^2]$
- $L$  – długość rury,  $[\text{m}]$
- $n$  – wskaźnik płynięcia,  $[-]$
- $\Delta P$  – strata ciśnienia,  $[\text{N}/\text{m}^2]$
- $T$  – wielkość zdefiniowana za pomocą równ. (8),  $[\text{N}/\text{m}^2]$
- $v$  – średnia prędkość przepływu,  $[\text{m}/\text{s}]$
- $\rho$  – gęstość,  $[\text{kg}/\text{m}^3]$

### Indeksy:

- $m$  – dotyczy zmodyfikowanego układu zmiennych fizycznych
- $*$ ,  $0$  – dotyczy punktów na rys. 1.

### LITERATURA

- Leblanc G.E., Secco R. A., Kostic M. – *Viscosity Measurement*. Rozdz. 30 w: Webster J.G. (ed.), 1999. *The Measurement, Instrumentation, and Sensors Handbook*. CRC Press LLC and Springer Verlag
- Matras Z., 2001. *Transport hydrauliczny reologicznie złożonych cieczy nienewtonowskich w przewodach*. Wyd. Pol. Krakowskiej, Kraków.
- Matras Z., 2003. Reometr kapilarno-rurowy. *Inż. Chem.Proc.*, **24**, 1, 139.
- Walters K., 1975. *Rheometry*, Chapman and Hall, London.